Esercizi di geometria per il corso PAS A059

1. Dato un rombo con un angolo di $60°$ trovare il rapporto tra il raggio del cerchio inscritto nel rombo e il raggio del piu' piccolo cerchio che contiene interamente il rombo.

Soluzione: Il cerchio piu' piccolo che contiene interamente il rombo e' quello che ha come diametro D la diagonale maggiore del rombo: tutti i cerchi piu' piccoli non possono contenere il rombo, perche' i due vertici dei due angoli di $60°$ sono appunto a distanza D e la distanza massima tra due punti che appartengono a un cerchio e' pari al suo diametro, dunque qualunque cerchio con un diametro minore di D non puo' contenere il rombo. Detto ora l il lato del rombo, poiche' esso e' costituito da due triangoli equilateri, la lunghezza della sua diagonale D e' pari a $\sqrt{3}l$. Il diametro del cerchio inscritto d e' pari alla distanza dei lati del rombo, e dunque all'altezza di uno dei due triangoli equilateri che costituiscono il rombo. La lughezza di d e' dunque pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}l$. Il rapporto tra i due diametri, che e' ovviamente uguale al rapporto tra i due raggi, e' dunque $\frac{d}{D} = \frac{1}{2}$.

2. Mostrare che perche' un quadrilatero sia inscrivibile in un cerchio la somma degli angoli opposti deve essere di $180°$.

Soluzione: I due angoli opposti in un quadrilatero inscritto in un cerchio sono due angoli alla circonferenza di due archi che sommati danno l'intera circonferenza. Dunque la somma dei due angoli al centro e' $360°$. La somma dei due angoli alla circonferenza e' la meta', ed e' dunque pari a $180°$. Quindi se un quadrilatero e' inscritto in una circonferenza deve avere la somma degli angoli opposti pari a $180°$.

3. E' dato un trapezio isoscele con l'angolo alla base di $60°$, la base minore di lunghezza l e la base maggiore di lunghezza 2l. Trovare il rapporto tra il raggio del cerchio circoscritto al trapezio e il raggio del piu' grande cerchio interamente contenuto nel trapezio.

Soluzione: Collegando i due vertici adiacenti alla base minore con il punto medio della base maggiore si vede che il trapezio e' formato da tre triangoli equilateri. Infatti ciascuno dei due triangoli che ha come lati uno dei lati obliqui e la meta' della base maggiore e' un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di $60°$, ed e' dunque equilatero. Il triangolo che ha come lato la base minore e' dunque anch'esso equilatero perche' ha tutti i lati di lunghezza l. Il trapezio, che e' inscrivibile in una circonferenza perche' ha gli angoli opposti di $60°$ e $120°$, e dunque soddisfa la condizione dell'esercizio precedente, e' in realta' la meta' di un esagono regolare. La base maggiore e' dunque pari al diametro del cerchio circoscritto. Detto R il raggio del cerchio circoscritto si ha dunque $R = l$. Il piu' grande cerchio interamente contenuto nel trapezio e' quello che ha come diametro d la distanza tra le basi, cioe' l'altezza del trapezio: infatti qualunque cerchio con un diametro maggiore di d contiene due punti che appartengono a una retta perpendicolare alle basi del trapezio e che sono a distanza maggiore di d, e dunque non possono essere entrambi contenuti nel trapezio. Poiche' quest'ultimo e' costituito da triangoli equilateri la sua altezza e' pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}l$. Il raggio r del cerchio contenuto nel trapezio e' dunque $r = \frac{\sqrt{3}}{4}l$. Il rapporto richiesto e' dunque $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. Mostrare che il rettangolo di perimetro $4n$ che ha l'area maggiore e' il quadrato di lato n.

Soluzione: Se il perimetro del rettangolo e' $P = 4n$, i suoi due lati hanno lunghezza $n - a$ e $n + a$, dove a e' un qualunque numero $a < n$. L'area A del rettangolo e' dunque $A = (n + a)(n - a) = n^2 - a^2$. Dunque piu' a e' grande piu' l'area e' piccola. L'area maggiore si ottiene per $a = 0$, che corrisponde al caso del quadrato.

5. Mostrare la formula seguente: $r = 2A/p$, dove A e' l'area di un triangolo, p e' il suo perimetro e r e' il raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

Soluzione: Dato il triangolo ABC e il suo cerchio inscritto di raggio r e centro O, si considerino i tre triangoli AOB, AOC e BOC. I tre triangoli hanno come base i tre lati AB, BC e CA e come altezza r, perche' il raggio da O a ciascuno dei tre lati e' perpendicolare al lato, essendo la circonferenza tangente a quel lato. Dunque si ha, indicando con $A(PQR)$ l'area del triangolo PQR:

$$A = A(ABC) = A(AOB) + A(AOC) + A(BOC) =$$

$$= \frac{AB \times r}{2} + \frac{AC \times r}{2} + \frac{BC \times r}{2} = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}rp$$

che e' la formula richiesta.

6. Utilizzando il risultato 5 trovare il rapporto tra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto a un triangolo isoscele con l'angolo alla base di 30°

Soluzione: Dividendo in due il triangolo dato tramite l'altezza si ottengono due triangoli rettangoli uguali con gli angoli di 30° e 60°. Detto l il lato adiacente al vertice, la base ha dunque lunghezza $\sqrt{3}l$. Considerando ora il rombo ottenuto unendo il triangolo dato con un altro triangolo uguale che ha la base in comune ma il vertice nel semipiano opposto, si ha che il rombo e' costituito da due triangoli equilateri. Dunque i tre vertici del triangolo dato sono tutti e tre a distanza l dal vertice del nuovo triangolo. Quindi il raggio R del cerchio circoscritto e' pari $R = l$. Inoltre l'altezza del triangolo e' pari a $\frac{l}{2}$. Il raggio del cerchio inscritto si ottiene dalla formula dimostrata nell'esercizio 5: poiche' il perimetro del triangolo e' $p = (2 + \sqrt{3})l$ e l'area e' $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, si ha $r = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}l$ e dunque $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}$

7. Utilizzando il risultato 5 trovare il rapporto tra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo con un angolo di 30°

Soluzione: Detta l l'ipotenusa del triangolo si ha che il raggio R del cerchio circoscritto e' pari a $R = \frac{l}{2}$, perche' l'ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con il diametro del cerchio circoscritto. Il raggio del cerchio inscritto si ottiene dalla formula dimostrata nell'esercizio 5: poiche' i lati del triangolo misurano l, $\frac{l}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}l$, si ha per il perimetro

$p = \frac{3+\sqrt{3}}{2} l$ e per l'area $A = \frac{\sqrt{3}}{8} l^2$ e dunque $r = \frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})} l$. Il rapporto richiesto e' dunque $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

8. Utilizzando il risultato 5 trovare il rapporto tra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo con un angolo di 45°

Soluzione: Detta l l'ipotenusa del triangolo si ha che il raggio R del cerchio circoscritto e' pari a $R = \frac{l}{2}$, perche' l'ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con il diametro del cerchio circoscritto. Il raggio del cerchio inscritto si ottiene dalla formula dimostrata nell'esercizio 5: i lati del triangolo misurano l, $\frac{l}{\sqrt{2}}$, $\frac{l}{\sqrt{2}}$, e dunque si ha per il perimetro $p = (1 + \frac{2}{\sqrt{2}})l = (1 + \sqrt{2})l$ e per l'area $A = \frac{l^2}{4}$. Si ottiene quindi $r = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} l$ e $\frac{r}{R} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Negli esercizi 9 e 10, in cui si domanda il numero di mattonelle necessario per costruire un pavimento, si ricordi che una volta che e' stato usato un pezzo di una mattonella il resto deve essere buttato via.

9. Una stanza quadrata di lato $4m$ deve essere pavimentata con mattonelle a forma di esagono regolare di lato $10cm$. Quante mattonelle serviranno?

Soluzione: Conviene innanzitutto ragionare sulle dimensioni delle mattonelle. La distanza tra due vertici opposti e' pari al doppio del lato, cioe' a 20 cm. La distanza tra due lati opposti e' pari al lato moltiplicato per $\sqrt{3}$, cioe' a circa 17,3 cm. Tagliamo allora una mattonella a meta' lungo il segmento che congiunge i punti medi dei due lati opposti. Mettendo la parte tagliata lungo il lato della stanza, e procedendo a nido d'ape, si vede che occorrono 27 mattonelle per completare una riga, arrivando al lato opposto con una mattonella tagliata nello stesso modo della prima. Lo stesso disegno deve essere ripetuto $\frac{400}{17,3}$ volte, che arrotondato per eccesso da' 24. Dunque con $24 \times 27 = 648$ mattonelle si puo' pavimetare la stanza. Questo modo di rivestire il bagno non e' detto che sia ottimale, ma il numero indicato e' certamente sufficiente.

10. Un piccolo bagno quadrato, di lato $1{,}41m$, deve essere pavimentato con mattonelle quadrate di lato pari a $20cm$. E' conveniente disporle con il lato parallelo ai muri del bagno, o con la diagonale parallela ai muri del bagno?

Soluzione: Se si mettono le mattonelle con i lati paralleli ai lati del bagno ne occorrono per forza $8 \times 8 = 64$ per pavimentare tutto il bagno. Ponendole con la diagonale parallela ai lati del bagno ne bastano 5 per andare da un lato all'altro. Il numero di mattonelle necessario per pavimentare il bagno e' 60 se ogni vertice del bagno si fa coincidere con i vertici di due mattonelle, mentre diventa 61 se il vertice del bagno coincide con il centro di una mattonella. In tutti e due i casi conviene dunque porre le diagonali delle mattonelle parallele ai lati del bagno.

Per dare una stima per eccesso (risp. per difetto) del numero π si puo' utilizzare il confronto con l'area di un poligono circoscritto (risp. inscritto) a un cerchio di raggio 1, oppure si puo' utilizzare il confronto con il suo perimetro.

11. Dare una stima per difetto del valore di π utilizzando il perimetro del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio 1.

Soluzione: Il lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio 1 e' evidentemente 1, quello del quadrato e' $\sqrt{2}$, quello del triangolo equilatero e' $\sqrt{3}$, perche' e' la distanza tra i due lati opposti dell'esagono regolare (il triangolo equilatero inscritto si ottiene congiungendo tre vertici dell'esagono). Il perimetro del triangolo equilatero inscritto e' dunque $3\sqrt{3} = 5.19$, quello del quadrato e' $4\sqrt{2} = 5.64$, quello dell'esagono e' 6. Le corrispondenti stime di π sono, rispettivamente, $\pi > 2.59$, $\pi > 2.82$, $\pi > 3$.

12. Dare una stima per difetto del valore di π utilizzando l'area del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio 1. Notare che la stima utilizzando il perimetro e' migliore di quella utilizzando l'area.

Soluzione: Dalle valutazioni dell'esercizio precedente si ha che l'area del triangolo, che e' pari al quadrato del lato per $\frac{\sqrt{3}}{4}$, e' pari a $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; l'area del quadrato e' pari a 2; l'area dell'esagono e' pari a $\frac{3\times\sqrt{3}}{2}$. Questo da' rispettivamente le stime $\pi > 1.29$, $\pi > 2$, $\pi > 2.59$, che sono molto peggiori di quelle ottenute con il perimetro.

13. Dare una dimostrazione del fatto che utilizzando un qualunque poligono regolare inscritto per stimare per difetto il valore di π, la stima che si ottiene attraverso la formula del perimetro e' sempre migliore di quella che si ottiene attraverso la formula dell'area.

Soluzione: L'area del poligono regolare e' data dal semiperimetro per l'apotema. La stima di π attraverso la formula dell'area, rispetto a quella attraverso il perimetro, e' sempre moltiplicata per il rapporto tra l'apotema e il raggio, che e' minore di 1.

14. Dare una stima per eccesso del valore di π utilizzando il perimetro del triangolo equilatero, del quadrato, dell'esagono regolare e dell'ottagono regolare circoscritto al cerchio di raggio 1.

Soluzione: Il lato del triangolo equilatero circoscritto e' il doppio di quello del triangolo equilatero inscritto, come si vede tracciando le tangenti ai punti di contatto tra la circonferenza e i vertici del triangolo inscritto. Dunque il lato del triangolo equilatero circoscritto e' $2\sqrt{3}$. Il lato del quadrato circoscritto e' evidentemente 2. Il lato dell'esagono circoscritto e' pari a $\frac{2}{\sqrt{3}}$, perche' il rapporto tra lato e apotema di un esagono regolare e' $\frac{2}{\sqrt{3}}$, e in questo caso l'apotema e' proprio il raggio del cerchio inscritto. Per l'ottagono si puo' ragionare nel modo seguente: dobbiamo togliere dai quattro angoli dal quadrato quattro triangoli rettangoli isosceli, che abbiano l'ipotenusa uguale alla parte restante del lato del quadrato. chiamato dunque l il lato dell'ottagono, poiche' il lato del quadrato e' 2, deve essere $2 = l + 2\frac{l}{\sqrt{2}}$ che da' $l = \frac{2}{\sqrt{2}+1}$. Il perimetro del triangolo equilatero circoscritto e' dunque $6\sqrt{3} = 10.38$, quello del quadrato e' 8, quello dell'esagono e' $\frac{12}{\sqrt{3}} = 6.94$, quello dell'ottagono e' $\frac{16}{\sqrt{2}+1} = 6.63$. Le corrispondenti stime di π sono, rispettivamente, $\pi < 5.18$,

$\pi < 4$, $\pi < 3.47$, $\pi < 3.32$.

15. Dare una stima per eccesso del valore di π utilizzando l'area del triangolo equilatero, del quadrato, dell'esagono regolare e dell'ottagono regolare circoscritto al cerchio di raggio 1. Notare che la stima utilizzando il perimetro e' esattamente la stessa di quella utilizzando l'area.

Soluzione: Dalle valutazioni dell'esercizio precedente si ha che l'area del triangolo, che e' pari al quadrato del lato per $\frac{\sqrt{3}}{4}$, e' pari a $3\sqrt{3}$; l'area del quadrato e' pari a 4; l'area dell'esagono e' pari a $2\sqrt{3}$, l'area dell'ottagono e' pari a quella del quadrato meno quella dei quattro triangoli, cioe' a $4 - 4(\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2})$. Questo da' rispettivamente le stime gia' trovate nell'esercizio precedente.

16. Dare una dimostrazione del fatto che utilizzando un qualunque poligono regolare circoscritto per stimare per eccesso il valore di π, la stima che si ottiene attraverso la formula del perimetro e' sempre identica a quella che si ottiene attraverso la formula dell'area.

Soluzione: L'area del poligono regolare e' data dal semiperimetro per l'apotema. Per i poligoni circoscritti l'apotema e' sempre uguale al raggio del cerchio, e quindi le due stime, attraverso l'area e attraverso il perimetro, sono le stesse.

17. Oslo ha una latitudine di 60° Nord. Quanto e' lungo il parallelo che passa per Oslo, sapendo che l'equatore e' lungo 40000 Km?

Soluzione: Il triangolo che collega Oslo, il centro della Terra e l'intersezione tra il meridiano di Oslo e l'equatore e' un triangolo equilatero perche' ha due lati uguali e un angolo di 60°. Questo significa che la distanza tra Oslo e l'asse terrestre e' la meta' del raggio terrestre, e quindi il parallelo che passa per Oslo e' lungo la meta' dell'equatore, e cioe' 20000 Km.

18. Qual'e' la distanza tra Oslo e il polo Sud?

Soluzione: La distanza tra i due poli lungo un meridiano e' di 20000 Km. L'angolo tra Oslo e il polo Nord e' di 30°, cioe' di $\frac{1}{6}$ dell'angolo piatto. Quindi la distanza tra Oslo e il polo Sud e' di $\frac{20000 \times 5}{6} = 16666\ Km$.

ESERCIZI DA RISOLVERE

Utilizzare per la soluzione degli esercizi solo argomenti geometrici elementari.

19. Un contadino ha un appezzamento di terreno delimitato su di un lato da un muretto di pietra. Vuole costruire un recinto rettangolare per le sue pecore, utilizzando per uno dei lati del rettangolo il muro a secco, e per gli altri della rete metallica. Dispone in tutto di 40 m di rete, e decide di costruire un recinto $20m \times 10m$. Mostrare che tutti gli altri

possibili recinti hanno area minore.

20. Guardando la tavola pitagorica, e partendo da un qualunque quadrato, il numero in alto a destra e' sempre piu' piccolo di 1: per esempio in alto a destra di 36 c'e' 35, in alto a destra di 49 c'e' 48, e cosi' via. Dare una giustificazione geometrica di questo fatto.

21. Mostrare geometricamente che n^2 e' la somma dei primi n numeri dispari.

22.* Mostrare che, tra tutti i triangoli isosceli di perimetro fissato, quello che ha l'area maggiore e' il triangolo equilatero.

23. Trovare il raggio del cerchio inscritto a un triangolo isoscele avente la base $b = 1$ e l'angolo al vertice di $135°$.

24. Il bus 20 express e' diviso in due sezioni articolate, ed e' sostenuto da tre assi, che sono ognuno a distanza di $6m$ dal precedente. Il massimo angolo che si puo' avere tra le due sezioni e' di $60°$. Trovare il minimo raggio di sterzata del 20 express.

25. Mostrare che il rettangolo di area $A = l^2$ con il perimetro piu' corto e' il quadrato di lato l.

26. Mostrare che tra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio $r = 1$ il quadrato e' quello che ha l'area maggiore.

27. Le aquile hanno bisogno di molto spazio: se in un punto c'e' un nido di una coppia di aquile, nessuna aquila nidifica a meno di $20Km$ da quel punto. Quanti nidi d'aquila possono entrare in un'area circolare di diametro pari a $50Km$?

28.* Una terna pitagorica e' un insieme di tre numeri interi a, b, c tali che $a^2 + b^2 = c^2$. Trovare un argomento geometrico semplice per mostrare che per ogni $a \geq 3$ dispari esiste una terna pitagorica in cui $c = b + 1$

29. Un ciclista deve superare un valico con un dislivello di $1000m$. Sulla piantina la strada, perfettamente rettilinea, misura esattamente $10Km$. Sapendo che la strada e' sempre in salita quanti Km segnera' , al minimo, il contachilometri della bicicletta una volta arrivati in cima al valico? E al massimo? Giustificare le risposte.

30. Mostrare che l'area di qualunque poligono regolare costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo e' equivalente alla somma delle aree degli stessi poligoni regolari costruiti sui cateti.